

# ಪ್ರೌಢಶಾಲೆಯ ಹಿರಿಯ ತರಗತಿಗಳಿಗಾಗಿ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು

**ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಸಂಪಾದಕರು:**  
ಪೃಥ್ವಿಜಿತ್ ಡೇ ಮತ್ತು  
ಶೈಲೇಶ್ ಶಿರಾಲಿ

**ಸಮಸ್ಯೆ VI-1-S.1**

$ABCD$  ಒಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ ಮತ್ತು ಅದರ ಕರ್ಣಗಳಾದ  $AC$  ಮತ್ತು  $BD$  ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಕರ್ಣಗಳೆರಡೂ ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುವು  $X$  ಆಗಿರಲಿ.  $P$  ಬಿಂದುವು  $BC$  ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಈಗ  $AD$  ಗೆ  $PX$  ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

**ಸಮಸ್ಯೆ VI-1-S.2**

$a, b, c$  ಗಳು ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ ಮೂರು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ.  $a, b, c$  ಗಳು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು  $b, c, a$  ಗಳು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ  $c, a, b$  ಗಳು ಸಮನ್ವಯ ಶ್ರೇಣಿಯಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ ಮತ್ತು  $a : b : c$  ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಸಮಸ್ಯೆ VI-1-S.3**

ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಮೊತ್ತವು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ :

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \dots + \frac{2016}{2017}$$

**ಸಮಸ್ಯೆ VI-1-S.4**

ಆರು ಸತತ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಪರಿಪೂರ್ಣ ಘನ ಆಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದು ಪ್ರಮಾಣೀಕರಿಸಿರಿ.

**ಸಮಸ್ಯೆ VI-1-S.5**

$a$  ಅಳತೆಯ ಭುಜಗಳುಳ್ಳ ಚೌಕವು ವೃತ್ತವೊಂದರಲ್ಲಿ ಅಡಕವಾಗಿದೆ. ಹಾಗೆ ಲಭ್ಯವಾದ ಖಂಡವೊಂದರಲ್ಲಿ ಅಡಕವಾಗಿರುವ ಚೌಕದ ಭುಜದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

**ಸಂಚಿಕೆ V-3ರಲ್ಲಿ (ನವೆಂಬರ್ 2016) ಪ್ರಕಟವಾದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಪರಿಹಾರಗಳು**

**ಸಮಸ್ಯೆ V-3-S.1 ಗೆ ಪರಿಹಾರ**

$ABCD$  ಒಂದು ಪೀನ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿರಲಿ.  $P, Q, R, S$  ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ  $AB, BC, CD, DA$  ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ.  $PQRS$  ಯಾವ ವಿಧವಾದ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗುತ್ತದೆ?  $PQRS$  ಚೌಕವಾಗಿದ್ದರೆ,  $ABCD$ ಯ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬಕೋನದಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ಪ್ರಮಾಣೀಕರಿಸಿರಿ.

**ಪರಿಹಾರ:** ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಪ್ರಮೇಯದ ಆಧಾರದ ಮೇರೆಗೆ  $PQ$  ಮತ್ತು  $RS$  ಭುಜಗಳು  $AC$  ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ ಮತ್ತು  $PQ = RS = AC/2$ . ಆದ್ದರಿಂದ  $PQRS$  ಒಂದು

ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ. PQRS ಚೌಕವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ  $PQ \perp QR$ . ಆದರೆ PQ ಭುಜವು AC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು QR ಭುಜವು BD ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ  $AC \perp BD$ .

#### ಸಮಸ್ಯೆ V-3-S.2 ಗೆ ಪರಿಹಾರ

ABCD ಒಂದು ಪೀನ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿರಲಿ. P, Q, R, S ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ AB, BC, CD, DA ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. U ಮತ್ತು V ಕ್ರಮವಾಗಿ AC ಮತ್ತು BD ಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. PR, QS ಮತ್ತು UV ರೇಖೆಗಳು ಸಹವರ್ತಿಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: PQRS ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. PR ಮತ್ತು QS ಗಳು X ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ. PR ಮತ್ತು QS ಎರಡೂ ರೇಖೆಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದು X ಆಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ತ್ರಿಕೋನ ADB ಯಲ್ಲಿ S ಮತ್ತು V ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ AD ಮತ್ತು BD ಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ SV ಯು AB ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು  $SV = AB/2$ .  $\triangle ABC$  ಯಲ್ಲಿ U ಮತ್ತು Q ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ AC ಮತ್ತು BC ಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ UQ ವು AB ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು  $UQ = AB/2$ . ಆದ್ದರಿಂದ ಚತುರ್ಭುಜ QUSV ಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಜೊತೆ ವಿರುದ್ಧ ಬಾಹುಗಳಾದ SV ಮತ್ತು UQ ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಸಮವಾಗಿವೆ. ತತ್ಕಾರಣ QUSV ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ. ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವುದರಿಂದ X ಬಿಂದುವು UV ಯ ಮೇಲೆಯೇ ಇರಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ PR, QS ಮತ್ತು UV ರೇಖೆಗಳು ಸಹವರ್ತಿಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

#### ಸಮಸ್ಯೆ V-3-S.3 ಗೆ ಪರಿಹಾರ

ಇಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟಾರೆ 12 ದೀಪಗಳಿವೆ, ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲವನ್ನೂ ಆರಿಸಲಾಗಿವೆ. ಪ್ರತಿ ದೀಪಕ್ಕೂ ಒಂದು ಸ್ವಿಚ್ ಇದೆ. ದೀಪದ ಸ್ವಿಚ್ಚನ್ನು ಒತ್ತಿದಾಗ ಅದರ ಸ್ಥಿತಿಯು ವ್ಯತಿರಿಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ, ಎಂದರೆ, ದೀಪ ಆನ್ ಆಗಿದ್ದರೆ ಸ್ವಿಚ್ ಆಫ್ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಇದರ ವ್ಯತಿರಿಕ್ತವೂ ಸ್ಥಾಪಿತವಾಗುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿ ಸುತ್ತಿನಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬರು 5 ಸ್ವಿಚ್ಚುಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಒತ್ತಬಹುದು. ಎಲ್ಲ ಸ್ವಿಚ್ಚುಗಳನ್ನು ಆನ್ ಮಾಡಲು ಕನಿಷ್ಠ ಎಷ್ಟು ಸುತ್ತುಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ? (ಹಾಂಗ್ ಕಾಂಗ್ ಪೂರ್ವಭಾವಿ ಆಯ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಧೆ 2015).

ಪರಿಹಾರ: n ಸುತ್ತುಗಳ ನಂತರ ಎಲ್ಲ ಸ್ವಿಚ್ಚುಗಳು ಆನ್ ಆಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ ನಾವು ಒಟ್ಟಾರೆ 5n ಬಾರಿ ಸ್ವಿಚ್ಚುಗಳನ್ನು ಆನ್ ಮಾಡಿರುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರತಿ ದೀಪವೂ ತನ್ನ ಸ್ಥಿತಿಯನ್ನು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯಷ್ಟು ಬಾರಿ ಬದಲಾಯಿಸಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟಾರೆ 12 ದೀಪಗಳು ಇರುವುದರಿಂದ ದೀಪಗಳು ಸ್ಥಿತಿ ಬದಲಿಸಿದ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ n ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿರುವ ಅಂಶವೆಂದರೆ  $n \neq 2$ , ಏಕೆಂದರೆ ಹೆಚ್ಚೆಂದರೆ  $5 \times 2 = 10$  ದೀಪಗಳನ್ನು 2 ಸುತ್ತುಗಳಲ್ಲಿ ಬೆಳಗಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ, ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ನಾಲ್ಕು ಸುತ್ತುಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ಎಲ್ಲ ದೀಪಗಳನ್ನು ಬೆಳಗಿಸಬಹುದು.

ಸುತ್ತು 1: 1, 2, 3, 4, 5 ಸ್ವಿಚ್ಚುಗಳನ್ನು ಒತ್ತಿ

ಸುತ್ತು 2: 6, 7, 8, 9, 10 ಸ್ವಿಚ್ಚುಗಳನ್ನು ಒತ್ತಿ.

ಸುತ್ತು 3: 7, 8, 9, 10, 11 ಸ್ವಿಚ್ಚುಗಳನ್ನು ಒತ್ತಿ.

ಸುತ್ತು 4: 7, 8, 9, 10, 12 ಸ್ವಿಚ್ಚುಗಳನ್ನು ಒತ್ತಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಉತ್ತರವು 4 ಎಂಬುದು ಸಾಬೀತಾಗುತ್ತದೆ.

#### ಸಮಸ್ಯೆ V-3-S.4 ಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರ

ಅಸಮ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜವು 5 ಘಟಕ, ಮತ್ತೊಂದು ಭುಜವು 2 ಘಟಕಗಳದ್ದಾಗಿದ್ದರೆ ಮೂರನೆಯ ಭುಜದ ಅಳತೆಯು ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಮೌಲ್ಯದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ABC ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ.  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$  ಆಗಿರಲಿ. ತ್ರಿಕೋನವು ಅಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವಾದುದರಿಂದ  $a < b < c$  ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು.  $h_a, h_b, h_c$  ಗಳು BC, CA, AB ಗಳ ಎತ್ತರದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಪ್ರತಿಪಾದಿಸುವುದಾದರೆ, ಆಗ  $h_a > h_b > h_c$  ಮತ್ತು  $ah_a = bh_b = ch_c = 2\Delta$ ; ಇಲ್ಲಿ  $\Delta$  ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ದತ್ತ ಅಂಶಗಳ ಪ್ರಕಾರ  $h_a = 5$ .  $a + b > c$  ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} > \frac{1}{h_c}$$

ಆಗಿಯೇ ಇರುತ್ತದೆ.

$h_b = 2$  ಆಗಿದ್ದರೆ,  $h_c$  ಯು ಪೂರ್ಣಾಂಕವೇ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ  $h_c = 1$  ಆಗಿರಲು ಮಾತ್ರ ಸಾಧ್ಯ. ಆದರೆ ಇದರಿಂದ  $7/10 > 1$  ಎಂಬ ಅನರ್ಥ ಸಮೀಕರಣ ದೊರಕುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ  $h_c = 2$ .  $h_b > h_c = 2$  ಎಂಬುದು ವಾಸ್ತವ ಅಂಶವಾದುದರಿಂದ ನಮಗೆ  $2 < h_b < 10/3$  ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣ ದೊರಕುತ್ತದೆ. ಅದರಿಂದ  $h_b = 3$ .

ಸಮಸ್ಯೆ V-3-S.5 ಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರ

ಮೂರು ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದ  $\overline{ABC}$  27ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಬಲ್ಲದ್ದಾಗಿದ್ದರೆ, ಮೂರು ಅಂಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ  $\overline{BCA}$  ಮತ್ತು  $\overline{CAB}$  ಸಹ 27ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಬಲ್ಲಂತಹವು ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ:  $\overline{ABC}$  ಯು 9 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಬಲ್ಲದ್ದರಿಂದ ಒಂಬತ್ತು  $A + B + C$  ಯನ್ನೂ ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ.  $m$  ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದ್ದು  $A + B + C = 9m$  ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ,

$$\begin{aligned}\overline{BCA} - \overline{ABC} &= (100B + 10C + A) - (100A + 10B + C) \\ &= 90B + 9C - 99A \\ &= 9(A + B + C) - 108A + 81B \\ &= 27(-4A + 3B + 3m),\end{aligned}$$

ಹಾಗೂ

$$\begin{aligned}\overline{CAB} - \overline{ABC} &= (100C + 10A + B) - (100A + 10B + C) \\ &= 99C - 90A - 9B \\ &= -81A + 108C - 9(A + B + C) \\ &= -81A + 108C - 81m \\ &= 27(-3A + 4C - 3m).\end{aligned}$$

ಆದ್ದರಿಂದ  $\overline{BCA}$  ಮತ್ತು  $\overline{CAB}$  ಸಹ 27ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಬಲ್ಲಂತಹವು.

ಅನುವಾದ : ಎನ್. ರಾಮನಾಥ್